Exercice 1/

1^re^ question.

En se reportant à la première partie du problème N° 23 nous pouvons écrire directement, le potentiel étant à symétrie sphérique :

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r}\, Y_l^m(\theta, \varphi) \qquad (1)$$

u (r) satisfaisant l'équation radiale modifiée :

$$\frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2 m r^2}\right] u = 0 \qquad (2)$$

Le changement de variable

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r \qquad (3)$$

entraine

$$\frac{d}{dr} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\,\frac{d^2}{dx^2}$$

En posant de plus

$$\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega} \qquad (4)$$

l'équation (2) devient :

$$\boxed{\left\{\frac{d^2}{dx^2} + 2\varepsilon - \frac{l(l+1)}{x^2} - x^2\right\} u(x) = 0} \qquad (5)$$

La fonction radiale R (r) = u (r)/r doit être finie en tout point et nulle à l'infini. Il en résulte que la fonction u (r) doit être finie partout, sauf éventuellement à l'infini, où toutefois elle doit croître moins vite que r, et nulle à l'origine r = 0. Des conditions identiques sont à imposer à la fonction u (x).

2^e^ question.

Pour des valeurs de x suffisamment grandes l'équation (5) peut être écrite

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right\} u(x) = 0$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} - (x^2 \pm 1)\right\} u(x) = 0 \qquad (6)$$

L'équation (6) admet des solutions de la forme

$$u(x) = A\, e^{-\frac{x^2}{2}} + B\, e^{+\frac{x^2}{2}}$$

et la signification physique de u (x) exige que l'on pose B = 0 :

$$u(x) = A\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (7)$$

Le résultat (7) conduit alors à rechercher pour l'équation (5) des solutions de la forme

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\, K(x) \qquad (8)$$

En injectant alors (8) dans (5) il vient :

$$\boxed{\left\{\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2\varepsilon - \frac{l(l+1)}{x^2} - 1\right\} K(x) = 0} \qquad (9)$$

Pour que u (x) satisfasse aux conditions précédemment énoncées il faut que la fonction K (x) soit nulle à l'origine et finie partout sauf éventuellement à l'infini où toutefois elle doit croître moins rapidement que la fonction

$$x\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

3e question.

Pour que la série

$$K(x) = x^s \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^\gamma = a_0 x^s + a_1 x^{s+1} + \dots + a_\gamma x^{s+\gamma} + \dots \qquad (10)$$

soit nulle à l'origine, il est nécessaire qu'elle ne contienne que des puissances positives de x — ce qui exige $s \geqslant 0$ — et que, de plus, elle ne possède pas de terme constant — ce qui exclut la valeur $s = 0$; d'où :

$$\boxed{s \geqslant 1} \qquad (11)$$

Dérivant la série (10) terme à terme par rapport à x il vient :

$$K'(x) = s a_0 x^{s-1} + (s+1) a_1 x^s + (s+2) a_2 x^{s+1} + \dots + (s+\gamma) a_\gamma x^{s+\gamma-1} + \dots \qquad (12)$$

et en dérivant à nouveau :

$$K''(x) = s(s-1) a_0 x^{s-2} + (s+1) s a_1 x^{s-1} + (s+2)(s+1) a_2 x^s + \dots$$
$$+ \dots + (s+\gamma)(s+\gamma-1) a_\gamma x^{s+\gamma-2} + \dots \qquad (13)$$

Portant alors les résultats (12) et (13) dans l'équation (9) on obtient une série qui doit être nulle pour toute valeur de x, ce qui ne peut être réalisé que si tous les coefficients de la série sont nuls.

Ecrivons alors que les coefficients des deux termes de plus bas degré dans cette série sont nuls :

— coefficient du terme de degré $s - 2$:

$$s(s-1) a_0 - l(l+1) a_0 = 0 \qquad (14)$$

— coefficient du terme de degré $s - 1$:

$$s(s+1) a_1 - l(l+1) a_1 = 0 \qquad (15)$$

Ecrivons également que le coefficient du terme général, de degré $s + \gamma$, est nul; il vient :

$$(s+\gamma+2)(s+\gamma+1) a_{\gamma+2} - 2(s+\gamma) a_\gamma +$$
$$+ 2\varepsilon a_\gamma - a_\gamma - l(l+1) a_{\gamma+2} = 0 \qquad (16)$$

a) La relation (14), compte tenu de $a_0 \neq 0$ entraîne :

$$s(s-1) - l(l+1) = 0$$

d'où l'on tire les deux solutions :

$$s = -l \quad \text{et} \quad s = l + 1$$

Le nombre l étant un entier positif ou nul, la condition (11) nous fait rejeter la solution $s = -l$ et il reste :

$$\boxed{s = l + 1} \qquad (17)$$

b) Compte tenu de (17) l'équation (15) s'écrit :

$$a_1 \{ (l+1)(l+2) - l(l+1) \}$$

ce qui entraîne nécessairement :

$$\boxed{a_1 = 0} \qquad (18)$$

c) La relation (16) permet d'obtenir une relation de récurrence entre les coefficients a_γ et $a_{\gamma+2}$ de la série entière. Cette relation s'écrit, compte tenu de (17) :

$$\boxed{a_{\gamma+2} = a_\gamma \frac{2(l+\gamma-\varepsilon) + 3}{(l+\gamma+3)(l+\gamma+2) - l(l+1)}} \qquad (19)$$

La condition $a_1 = 0$ entraîne, d'après (19) :

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2p+1} = 0$$

et la solution K (x) prend finalement la forme :

$$\boxed{K(x) = x^{l+1}(a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2p} x^{2p} + \dots)} \qquad (20)$$

Cette série est convergente pour toute valeur de x puisque l'on a, d'après (19) :

$$\frac{a_{2p+2}\, x^{2p+2}}{a_{2p}\, x^{2p}} = x^2 \frac{2(l + 2p - \varepsilon) + 3}{(l + 2p + 3)(l + 2p + 2) - l(l+1)} \to 0 \text{ quand } p \to \infty$$

Mathématiquement le problème est terminé. Cependant pour que la solution (20) ait un sens physique il nous reste à voir si elle croît moins vite à l'infini que la fonction

$$x\, e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (21)$$

A cet effet nous allons comparer la série (20), pour $l = 0$, avec le développement en série de la fonction (21), ce qui revient à comparer la série située dans la parenthèse de (20) avec le développement de

$$e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (22)$$

Ce développement s'écrit :

$$e^{\frac{x^2}{2}} = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots + b_{2p} x^{2p} + b_{2p+2} x^{2p+2} + \dots \qquad (23)$$

avec :

$$b_{2p} = \frac{1}{p!\, 2^p}$$

d'où l'on tire

$$\frac{b_{2p+2}}{b_{2p}} = \frac{p!\, 2^p}{(p+1)!\, 2^{p+1}} = \frac{1}{2(p+1)} \simeq \frac{1}{2p} \text{ (pour p grand)} \qquad (24)$$

tandis que la relation (19), pour $l = 0$, donne :

$$\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} = \frac{2(2p - \varepsilon) + 3}{(2p+3)(2p+2)} \simeq \frac{1}{p} \text{ (pour p grand)} \qquad (25)$$

On s'aperçoit alors que les coefficients de la série située dans la parenthèse de (20) décroissent moins vite que ceux du développement de (22) lorsque p devient de plus en plus grand. Par suite pour les grandes valeurs de x, où les termes d'ordre élevé jouent un rôle prépondérant, la série K (x), pour $l = 0$, croît plus vite que la fonction (21) et ce résultat est vrai à fortiori pour les valeurs de l différentes de zéro.

Remarque : En considérant le développement en série de e^{x^2} on peut voir que K (x) pour $l = 0$ se comporte à l'infini comme e^{x^2}.

Pour que la fonction d'onde tende vers zéro lorsque x tend vers l'infini il est nécessaire que la série entière (20) possède un nombre fini de termes, c'est-à-dire qu'elle se ramène à un polynôme.

Supposons donc que $a_{\gamma'}$ soit le coefficient du dernier terme du polynôme (γ' pair). En écrivant, d'après (19), que $a_{\gamma'+2} = 0$ on obtient :

$$2(l + \gamma' - \varepsilon) + 3 = 0$$

d'où :

$$\varepsilon = l + \gamma' + \frac{3}{2}$$

soit :

$$\boxed{E = \hbar\omega\left(l + \gamma' + \frac{3}{2}\right)} \qquad (26)$$

et la fonction d'onde associée à cette valeur propre s'écrit, à une constante de normalisation près, compte tenu de (1), (3), (8) et (20) :

$$\boxed{\psi(\vec{r}) = Y_l^m(0, \varphi)\, e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}\, r^l \{\text{Polynôme pair de degré } \gamma' \text{ en } \alpha r\}} \qquad (27)$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad (28)$$

4e question.

La partie radiale de la fonction d'onde s'écrit :

$$R(r) = e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}\, r^l\, [a_0 + a_2(\alpha r)^2 + \dots + a_{\gamma'}(\alpha r)^{\gamma'}] \qquad (29)$$

Cette fonction R (r) tend asymptotiquement vers zéro lorsque r tend vers l'infini et elle possède de plus un zéro à l'origine pour toutes les valeurs de l sauf la valeur $l = 0$. Ces zéros ne constituent pas des nœuds pour la fonction radiale puisque pour les valeurs de r correspondantes ($r = 0$ et $r = \infty$) la fonction R (r) ne change pas de signe. Les nœuds de la fonction radiale correspondent aux zéros du polynôme pair, de degré γ', zéros qui sont supposés correspondre à des valeurs réelles de la variable r. Cette variable r ne pouvant prendre que des valeurs positives, le polynôme pair de degré γ' possède $\gamma'/2$ zéros entre $r = 0$ et $r = \infty$.

Nous poserons donc :

$$\frac{\gamma'}{2} = v - 1 \qquad (30)$$

et la relation (26) s'écrit

$$\boxed{E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)} \qquad (31)$$

avec

$$\boxed{n = l + 2\,(v - 1)} \qquad (32)$$

Le nombre l est un entier positif ou nul. Le nombre de nœuds $\gamma'/2$ est également un entier positif ou nul, ce qui entraîne $v \geqslant 1$. Par suite le nombre quantique principal n peut prendre toutes les valeurs entières y compris la valeur zéro.

5ᵉ question.

On rappelle que le spin propre des nucléons est caractérisé par le nombre quantique $s = 1/2$ et que, pour une valeur donnée de l, le nombre j peut prendre les deux valeurs

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad j = l - \frac{1}{2} \qquad (33)$$

sauf pour $l = 0$ où l'on a seulement $j = 1/2$.

On rappelle également que la projection du moment cinétique total sur un axe est caractérisé par le nombre quantique magnétique m_j qui, pour une valeur j donnée, peut prendre les $(2j + 1)$ valeurs demi-entières satisfaisant

$$-j \leqslant m_j \leqslant +j \qquad (34)$$

Le principe d'exclusion de Pauli indique d'autre part qu'il est impossible de trouver dans un noyau deux nucléons de même espèce ayant tous leurs nombres quantiques identiques.

On peut alors dresser le tableau suivant :

n	l	v	*Nomenclature vlj des états*	*Nombre d'états pour l donné*	*Nombre d'états pour n donné*	*Nombre de nucléons de même espèce ayant une énergie caractérisée par n*
0	0	1	$1s^{1/2}$	2	2	2
1	1	1	$1p^{1/2}$, $1p^{3/2}$	6	6	6
2	0	2	$2s^{1/2}$	2	12	12
	2	1	$1d^{3/2}$, $1d^{5/2}$	10		
3	1	2	$2p^{1/2}$, $2p^{3/2}$	6	20	20
	3	1	$1f^{5/2}$, $1f^{7/2}$	14		
4	0	3	$3s^{1/2}$	2	30	30
	2	2	$2d^{3/2}$, $2d^{5/2}$	10		
	4	1	$1g^{7/2}$, $1g^{9/2}$	18		

etc...

Rᴇᴍᴀʀǫᴜᴇ : La fonction d'onde complète du nucléon est égale au produit de la fonction d'onde d'espace (27) par la fonction d'onde de spin. Nous supposons ici que l'orientation du spin des nucléons est sans influence sur leur énergie ou encore que les deux valeurs de j associées à une même valeur de l correspondent à la même énergie.

La relation (31) indique que les niveaux d'énergie sont équidistants.

Le diagramme énergétique représentant la dégénérescence dans le cas du potentiel oscillateur harmonique isotrope est situé dans la partie gauche de la figure 19.1 ci-dessous.

Relation générale donnant le nombre d'états distincts pour une valeur donnée du nombre n. — *a*) n *pair*. — Pour une valeur paire de n le nombre l ne peut prendre que les valeurs paires 0, 2, 4, ..., n, soit $(n + 2)/2$ valeurs. D'autre part pour chaque valeur de l le nombre quantique m_j peut prendre $2\,(2l + 1)$ valeurs, le facteur 2 tenant compte des deux orientations du spin.

Le nombre N d'états différents pour n donné, pair, s'écrit alors :

$$N = \sum_{l=0}^{l=n} 2\,(2\,l + 1) \qquad (l \text{ pair})$$

soit en développant :

$$N = 2\,[1 + 5 + 9 + \dots (2n + 1)]$$

La progression arithmétique ayant $(n + 2)/2$ termes, on obtient :

$$N = 2\,\frac{[(2n + 1) + 1]}{2} \cdot \frac{n + 2}{2} = (n + 1)\,(n + 2)$$

b) n ***impair.*** — Pour une valeur n impaire le nombre l ne peut prendre que les valeurs impaires 1, 3, 5, 7, ..., n, soit $(n + 1)/2$ valeurs.

Le nombre d'états s'écrit ici :

$$N = \sum_{l=1}^{l=n} 2\,(2\,l + 1) = 2\,[3 + 7 + \dots + (2n + 1)] \qquad (l \text{ impair})$$

d'où, la progression ayant $(n + 1)/2$ termes :

$$N = (n + 1)\,(n + 2)$$

et l'on obtient le même résultat que pour n pair.

CONCLUSION : Pour n pair ou impair le nombre d'états s'écrit :

$$\boxed{N = (n + 1)\,(n + 2)} \qquad (35)$$